

PII: S0017-9310(98)00001-5

# Sur le refroidissement d'un cylindre chauffé en régime permanent de convection mixte

M. AMAOUCHE† et A. CHENNAFI

Laboratoire de Mécanique des Fluides, Institut de Physique U.S.T.H.B., B.P. 32, Bab Ezzouar, Alger, Algérie

(Reçu 6 juillet 1993 et sous forme finale 10 décembre 1997)

**Resumé**—Une procédure numérique basée sur la combinaison de la méthode des différences finies et de la méthode des intégrales de frontière est employée pour étudier le mécanisme de refroidissement, par convection mixte, d'un cylindre chauffé dans sa partie centrale. Les résultats numériques sont donnés pour  $r_c = 0.11$ ,  $Pr = 0.72$  et  $5$ ,  $Re \leq 40$ ,  $Gr/Re^2 \leq 8$  et  $\lambda \leq 400$ . L'influence de ces divers paramètres est illustrée aussi bien à travers les distributions, le long de la paroi, de grandeurs locales telles que la température, la pression, les coefficients de frottement et de transfert thermique, que sur le calcul des coefficients de traînée et de transfert de chaleur moyen. Ces courbes mettent en évidence la forte dépendance de l'écoulement vis à vis des paramètres  $\lambda$  et  $Gr/Re^2$  mais aussi l'importance des autres paramètres. © 1998 Elsevier Science Ltd. All rights reserved.

## 1. INTRODUCTION

Dans cette étude, nous exposons les principales caractéristiques du phénomène de refroidissement d'un cylindre chauffé placé dans un courant extérieur transversal (Fig. 1), en tenant compte des effets combinés de la conduction dans le cylindre et des transferts convectifs dans l'écoulement. Ce dernier est supposé bidimensionnel et stationnaire (le fil est horizontal et assez long, les nombres de Reynolds et de Grashoff sont suffisamment faibles et les conditions aux limites permanentes).

Cette étude peut avoir des applications dans le domaine du génie électrique. En l'occurrence, il est important de connaître les lois de refroidissement de certains composants électriques quand ils sont soumis à une faible ventilation. Si l'on choisit convenablement certains paramètres, en l'occurrence le rayon du coeur chauffé ou bien  $\lambda$  assez grand, les résultats de cette étude peuvent servir aussi dans le domaine des techniques de thermoanémométrie. Une abondante littérature est consacrée à l'étude du transfert de chaleur et à ses implications sur l'écoulement quand la température de paroi est donnée, uniforme en général. Parmi les travaux les plus récents fondés sur cette hypothèse, citons ceux de Badr [1, 2], Amaouche et Peube [3, 4], Heckel *et al.* [5], Vilimpoc *et al.* [6]. Dans la pratique, la condition d'uniformité de la température pariétale n'est pas rigoureusement satisfaite; elle devrait résulter d'un calcul où les problèmes de convection externe et de conduction interne sont traités simultanément. On admet toutefois que la tem-

pérature de paroi peut être maintenue uniforme dans la partie centrale (noyau) du matériau chauffé; la dimension relative de ce noyau constitue un paramètre supplémentaire du problème.

La nécessité de prendre en compte l'interaction entre les problèmes externe et interne est bien soulignée par Sunden [7] à travers notamment la sensibilité de la température de paroi à l'égard du rapport des conductibilités thermiques du fluide et solide. Le modèle développé par cet auteur repose sur la technique des différences finies et se rapporte à un écoulement extérieur vertical. Dans cette configuration d'écoulement, les poussées d'Archimède se comportent dans la couche limite comme un gradient de pression uniformément favorable ou défavorable, selon la situation considérée, en co-ou contre courant. La symétrie du problème est alors préservée.

Lorsque la direction  $\alpha_0$  de l'écoulement loin du cylindre est quelconque, il apparaît dans la couche limite des zones où les forces d'origine thermique assistent l'écoulement extérieur, alternées avec des zones de convection mixte adverse. La coexistence de ces zones confère à l'écoulement dans la couche limite une structure fondamentalement différente de celle observée dans les cas symétriques.

Les particularités de cette configuration résident surtout dans la région de stagnation [8] dont la localisation dépend de l'importance relative des forces d'origine thermique; ces dernières y induisent des courants de retour analogues à ceux observés dans les zones décollées.

L'aval de l'obstacle est aussi le siège de phénomènes intéressants [4] comme la modification de la géométrie des deux nappes de tourbillons qui sont présentes dans l'écoulement de convection forcée aux faibles nombres

† Author to whom correspondence should be addressed.

## NOMENCLATURE

$C_p$	chaleur spécifique à pression constante	$U_\alpha$	composante angulaire de la vitesse
$C_x$	coefficient de traînée	$(x, y)$	coordonnées polaires logarithmiques.
$C_{xf}$	coefficient de traînée en convection forcée		
$g$	accélération de la pesanteur	<b>Symboles grecs</b>	
$Gr$	nombre de Grashoff $((= 8R^3 g \beta (T_c - T_\infty) / \nu^2))$	$\alpha_0$	inclinaison de l'écoulement uniforme par rapport à la verticale
$Gr/Re^2$	paramètre de convection mixte	$\beta$	coefficient de dilatation thermique
$(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$	vecteurs orthonormés (Fig. 1)	$\lambda$	rapport des conductibilités thermiques $(= \lambda_s / \lambda_f)$
$Nu$	nombre de Nusselt local $(= -2/\pi(\partial\theta/\partial y)_{y=0})$	$\theta$	température réduite $(= (T - T_\infty)/(T_c - T_\infty))$
$\overline{Nu}$	nombre de Nusselt moyen	$\theta_p$	température de paroi réduite
$\overline{Nu}_f$	nombre de Nusselt moyen en convection forcée	$\mu$	viscosité dynamique
$P$	pression réduite	$\nu$	viscosité cinématique
$Pr$	nombre de Prandtl $(= \mu C_p / \lambda_f)$	$\psi$	fonction de courant adimensionnelle
$(r, \alpha)$	coordonnées polaires dans le plan $(I, J)$	$\omega$	vorticité réduite $(\text{rot } \mathbf{V} \cdot \mathbf{K})$
$r_c$	rayon adimensionnel du noyau chauffé	$\omega_p$	coefficient de frottement à la paroi
$R$	rayon du fil (longueur de référence)	$\Omega_e$	extérieur du cercle $\partial\Omega_p$
$Re$	nombre de Reynolds $(= 2RU_\infty/\nu)$	$\tilde{\Omega}_e$	transformé de $\Omega_e$ : $\{(x, y), 0 \leq x < 2, y > 0\}$
$T$	température	$\Omega_i$	couronne limitée par $\partial\Omega_i$ et $\partial\Omega_p$
$T_c$	température du noyau chauffé	$\partial\Omega_i$	cercle $r = r_c$
$T_\infty$	température de l'écoulement uniforme	$\partial\Omega_p$	cercle $r = 1$
$U_\infty$	vitesse de l'écoulement uniforme (vitesse de référence)	$\partial\Omega_\infty$	cercle $r = r_\infty$ .

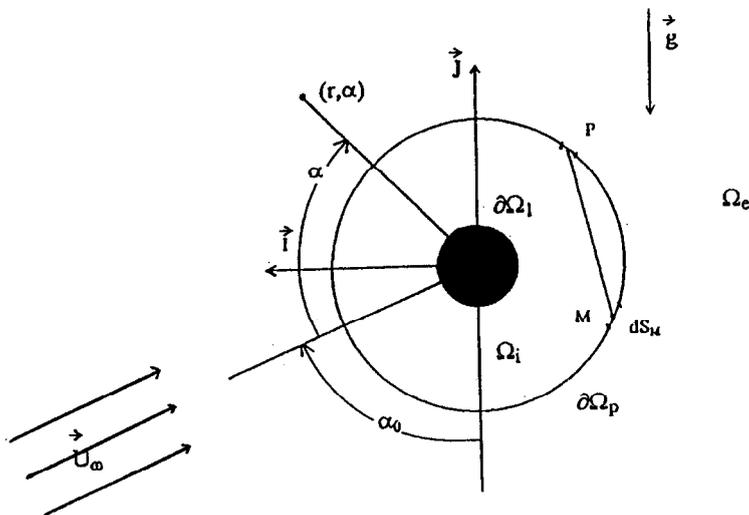


Fig. 1. Géométrie du problème.

de Reynolds. L'augmentation du paramètre de convection mixte se traduit par la réduction progressive de la taille des tourbillons qui peuvent disparaître complètement, l'un après l'autre, si ce paramètre est suffisamment grand.

D'un point de vue qualitatif, l'écoulement n'est pas

fondamentalement modifié par des variations de l'inclinaison  $\alpha_0$  pourvu que  $\alpha_0 \neq k\pi$ . Cependant, c'est pour  $\alpha_0 = \pi/2$  que les écarts des caractéristiques de l'écoulement par rapport aux deux cas symétriques extrêmes, toute chose restant égale par ailleurs, sont les plus importants. C'est la raison pour laquelle nous

avons choisi ce cas de figure pour tenter d'illustrer les conséquences du couplage conduction interne-convection externe sur le transfert de chaleur et la structure de l'écoulement.

Le modèle numérique que nous utilisons résulte de la combinaison de la technique des différences finies, pour le problème extérieur et de la méthode des intégrales de frontière pour l'inversion du problème de conduction. Les difficultés qui accompagnent la mise en oeuvre de la technique itérative sont aplanies au moyen d'un calcul algébrique permettant d'explicitier la température de paroi à chaque étape du procédé de stationnarisation. Les avantages de ce modèle sont évidents dès lors que le champ des températures dans le fil n'est pas recherché.

### 2. FORMULATION DU PROBLÈME

Dans le cadre de l'approximation de Boussinesq, l'application des lois de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie, conduit aux équations suivantes :

$$\nabla\psi\wedge\nabla(\Delta\psi) + \frac{2}{Re}\Delta(\Delta\psi)\mathbf{K} = \left(\frac{Gr}{2Re^2}\right)\nabla\theta\wedge\mathbf{J} \quad (1)$$

$$\nabla\psi\wedge\nabla\theta + \frac{2}{RePr}\Delta\theta\mathbf{K} = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega_e \quad (2)$$

$$\Delta\theta = 0 \quad \text{dans } \Omega_i \quad (3)$$

Les conditions aux frontières associées sont :

$$\theta|_{r=r_c} = 1 \quad (4)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \frac{\partial\theta}{\partial r} \Big|_{r=1+\epsilon} - \lambda \frac{\partial\theta}{\partial r} \Big|_{r=1-\epsilon} \right) = 0 \quad (5)$$

$$\text{rot}(\psi\mathbf{K})|_{r=1} = \mathbf{0} \quad (6)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \theta = 0 \quad (7)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \text{rot}(\psi\mathbf{K}) = \mathbf{U}_\infty/U_\infty \quad (8)$$

Elles traduisent respectivement l'isothermie du noyau chauffé, la continuité de la densité de flux de chaleur et l'adhérence du fluide à la paroi, l'uniformité des champs de température et de vitesse loin de l'obstacle. Le problème (1)–(8) est posé en termes de variables réduites en utilisant la vitesse  $U_\infty$  de l'écoulement uniforme et le rayon  $R$  du cylindre comme grandeurs de référence. La fonction de courant  $\psi$  et la température réduite  $\theta$  sont reliées respectivement à la vitesse  $\mathbf{V}$  et à la température  $T$  par :

$$\mathbf{V} = \text{rot}(\psi\mathbf{K}), \quad \theta = (T - T_\infty)/(T_c - T_\infty).$$

$T_\infty$  et  $T_c$  sont les températures du fluide assez loin du cylindre et du noyau chauffé de rayon  $r = r_c$ .  $\mathbf{J}$  et  $\mathbf{K}$  sont deux vecteurs unitaires respectivement portés par la verticale ascendante et normal au plan du mouvement.  $Re = 2RU_\infty/\nu$ ,  $Gr = 8R^3g\beta(T_c - T_\infty)/\nu^2$  et  $Pr = \mu C_p/\lambda_f$  sont les nombres de Reynolds, de Grashof

et de Prandtl où  $C_p$ ,  $\beta$ ,  $\nu$  et  $\mu$  sont la chaleur spécifique à pression constante, le coefficient de dilatation thermique et les viscosités cinématique et dynamique du fluide ;  $\lambda = \lambda_s/\lambda_f$  est le rapport de conductibilités thermiques du solide et du fluide.

$\Omega_e$  et  $\Omega_i$  désignent respectivement l'extérieur du cercle  $r = 1$  et la couronne  $r_c < r < 1$ .

### 3. MODÈLE NUMÉRIQUE

Le problème (1)–(8) est résolu numériquement en combinant les avantages dus à la simplicité de mise en oeuvre de la méthode des différences finies pour le traitement du problème de convection et ceux résultants de l'application de la technique des intégrales de frontière au problème de conduction.

#### 3.1. Traitement du problème convectif

3.1.1. *Troncature du domaine  $\Omega_e$ .* Le mise en oeuvre d'une procédure numérique nécessite de borner  $\Omega_e$  par une frontière  $\partial\Omega_\infty$ . Son rayon  $r_\infty$  doit être suffisamment grand pour que l'écoulement simulé reste pratiquement insensible au confinement ; il dépend en fait des conditions aux limites affichées sur  $\partial\Omega_\infty$ . L'étude préalable du comportement asymptotique de l'écoulement offre l'avantage de permettre des valeurs relativement faibles de  $r_\infty$  tout en réduisant l'influence de la troncature.

Les approximations d'Imai [9] sont fréquemment utilisées, à des degrés divers de précision, quand le nombre de Reynolds est faible ou modéré. Limitées à l'ordre un, ces approximations s'écrivent :

(a) pour la température :

$$\theta(r_\infty, \alpha) \sim r_\infty^{(-1/2)} \exp \left\{ - \left( \frac{RePr}{2} \right) r_\infty \cos^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right) \right\} F(\alpha) \quad (9)$$

Cette relation est de type mixte de par la présence de la fonction arbitraire  $F(\alpha)$ . Elle montre que la température s'amortit exponentiellement presque partout loin de la paroi sauf dans la zone de sillage que l'on peut définir approximativement par  $r \cos^2(\alpha/2) = 0(1)$  et dans laquelle l'amortissement est plus lent.

(b) pour la fonction de courant

Compte tenu de la relation (9), le second membre de l'équation (1) se comporte asymptotiquement comme la fonction  $(1 + \cos(\alpha))\theta(r_\infty, \alpha)$  qui s'annule dans le sillage et s'amortit exponentiellement en dehors de celui-ci. Il en résulte que  $\Delta\psi$  admet un comportement analogue à celui de la température, soit :

$$\Delta\psi(r_\infty, \alpha) \sim r_\infty^{(-1/2)} \exp \left\{ - \frac{Re}{2} r_\infty \cos^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right) \right\} G(\alpha). \quad (10)$$

Cette équation permet de déduire le comportement de la fonction de courant, soit :

$$\psi(\alpha, r_\infty) \sim \psi_e(\alpha, r_\infty) + \tilde{\psi}(\alpha, r_\infty) \quad (11)$$

où  $\psi_e$  est la fonction de courant de l'écoulement potentiel sans circulation et :

$$\tilde{\psi}(\alpha, r_\infty) = a_1 \log r_\infty + a_2 \left\{ \operatorname{erfc} \left[ \left( \frac{Re r_\infty}{2} \right)^2 \cos \frac{\alpha}{2} \right] - \frac{\alpha}{\Pi} \right\} \quad (12)$$

$a_1$  et  $a_2$  sont deux constantes arbitraires dont l'élimination conduit à une condition de type mixte.

3.1.2. *Equations transformées.* Il est avantageux, d'un point de vue numérique, d'utiliser les coordonnées polaires logarithmiques liées aux coordonnées polaires classiques par :

$$(x, y) = (\alpha, \log r) / \Pi. \quad (13)$$

Les équations (1) and (2) prennent alors la forme

$$\begin{aligned} \psi_x \omega_y - \psi_y \omega_x - (2/Re) \tilde{\Delta} \omega \\ = (Gr/2Re^2) \Pi \exp(\Pi y) \{ \theta_y \sin(\alpha_0 + \Pi x) \\ + \theta_x \cos(\alpha_0 + \Pi x) \} \text{ dans } \tilde{\Omega}_e \end{aligned} \quad (14)$$

$$\psi_x \theta_y - \psi_y \theta_x - \left( \frac{2}{Re Pr} \right) \tilde{\Delta} \theta = 0. \quad (15)$$

La vorticité  $\omega$  est une variable intermédiaire que l'on introduit pour des commodités de calcul ; elle est reliée à  $\psi$  par l'équation de Poisson :

$$\omega(\Pi \exp(\Pi y))^2 + \tilde{\Delta} \psi = 0 \quad (16)$$

$\tilde{\Delta}$  est l'opérateur de Laplace  $\partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2$ ,  $\tilde{\Omega}_e$  est le domaine transformé de  $\Omega_e$ .

3.1.3. *Algorithme de résolution.* La résolution du problème décrit par les équations (14)–(16) munies des conditions aux limites (4)–(6) et (9) et (11) transformées par (13), est recherchée au moyen d'une procédure de stationnarisation.

Le couple  $(\omega^{n+1}, \theta^{n+1})$  est calculé à partir du triplet  $(\omega^n, \theta^n, \psi^n)$  par la technique des directions alternées associée à une discrétisation centrée. A chaque itération externe d'indice "n", l'équation de Poisson pour  $\psi$  est résolue par la même technique optimisée par l'introduction de la double série de paramètres de Wachpress [10]. L'emploi des relations hermitiennes [11, 12] permet une précision  $O(h^4)$  tout en conservant dans le cas de l'équation de Poisson, les avantages de simplicité des schémas  $O(h^2)$ .

3.2. *Traitement du problème conductif*

Le méthode numérique employée pour la résolution du problème de conduction résulte d'une discrétisation en différences finies de l'équation intégrale de Fredholm :

$$\frac{1}{2} \theta(P_k) = \int_{\partial\Omega} \left\{ \theta(P_1) \frac{\partial G}{\partial n_1}(P_k, P_1) - G(P_k, P_1) \frac{\partial \theta}{\partial n_1} \right\} ds_1 \quad (17)$$

obtenue à partir de la 2<sup>e</sup> identité de Green.

$G(P_k, P_1) = (\frac{1}{2}\Pi) \log |\overrightarrow{P_k P_1}|$ ,  $\partial/\partial n_1$  est l'opérateur 'dérivée normale' au point influençant  $P_1$ .  $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_p$  est la frontière de  $\Omega_i$  (Fig. 1).

La discrétisation de la frontière  $\partial\Omega (\partial\Omega = \sum_{i=1}^N \partial_i \Omega)$ , transforme l'équation (17) en un système linéaire de la forme :

$$E\hat{\theta} = F\hat{\phi} \quad (18)$$

où  $E$  et  $F$  sont des matrices carrées dont les éléments sont :

$$\begin{cases} E_{kl} = \int_{\partial_1 \Omega} \frac{\overrightarrow{P_k P_1} \cdot \overrightarrow{n_1}}{|P_k P_1|^2} ds_1 - \Pi \delta_{kl} \\ F_{kl} = \int_{\partial_1 \Omega} \log |\overrightarrow{P_k P_1}| ds_1. \end{cases} \quad (19)$$

Ces intégrales sont calculées par la formule de Simpson pour  $k \neq l$ .

Pour  $k = l$ , l'intégration est analytique, on obtient :

$$\begin{cases} E_{ll} = - \left( \Pi + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^N e_{kl} \right) \\ F_{ll} = (\log(ds_l/2) - 1) ds_l \end{cases} \quad (20)$$

$\hat{\theta}$  et  $\hat{\phi}$  sont les vecteurs :

$$\begin{cases} \hat{\theta} = \{ \theta(P_1), \dots, \theta(P_N) \}' \\ \hat{\phi} = \left\{ \frac{\partial \theta}{\partial r} \Big|_{P_1}, \dots, \frac{\partial \theta}{\partial r} \Big|_{P_N} \right\}'. \end{cases} \quad (21)$$

3.3. *Traitement du couplage pariétal*

Quand les problèmes internes et externes sont résolus séparément, moyennant par exemple une distribution arbitraire de la température sur la paroi  $\partial\Omega_p$ , la satisfaction de la condition (5) de transmission de la densité de flux thermique nécessite la mise en oeuvre d'une procédure itérative dont l'optimisation introduit quelques difficultés supplémentaires.

Ces dernières sont aplanies grâce au calcul suivant qui offre en outre la possibilité d'exprimer directement la distribution de la température de paroi.

En effet, si l'on décompose les vecteurs  $\hat{\theta}$  et  $\hat{\phi}$  sous la forme :

$$\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_p)' \quad \hat{\phi} = (\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_p)'$$

où les indices 1 et  $p$  se rapportent aux cercles  $\partial\Omega_1$  et  $\partial\Omega_p$ , le système (18) prend la forme :

$$\begin{cases} -E_{1p} \hat{\theta}_p + F_{11} \hat{\phi}_1 + F_{1p} \hat{\phi}_p = E_{11} \hat{\theta}_1 \\ -E_{pp} \hat{\theta}_p + F_{p1} \hat{\phi}_1 + F_{pp} \hat{\phi}_p = E_{p1} \hat{\theta}_1 \end{cases} \quad (22)$$

L'élimination du vecteur  $\hat{\phi}_1$  qui ne présente pas d'intérêts particuliers pour la suite des calculs permet d'exprimer, pour une distribution donnée de tem-

pérature  $\hat{\theta}_1$ , la densité de flux  $\hat{\phi}_p$  en fonction de la température  $\hat{\theta}_p$ , soit :

$$A\hat{\phi}_p = B\hat{\theta}_p + C\hat{\theta}_1 \tag{23}$$

avec

$$A = \{F_{11}^{-1}F_{1p} - F_{p1}^{-1}F_{pp}\}$$

$$B = \{F_{11}^{-1}E_{1p} - F_{p1}^{-1}E_{pp}\}$$

$$C = \{F_{11}^{-1}E_{11} - F_{p1}^{-1}E_{p1}\}.$$

Une deuxième relation entre  $\hat{\phi}_p$  et  $\hat{\theta}_p$  peut être obtenue à chaque itération externe du procédé de stationnarisation du problème convectif.

Si le champ de température externe est décrit sur chaque circonférence de rayon  $r_k$  par les vecteurs  $\hat{\theta}_k$  ( $k = p + 1, \dots, K$ ), l'équation de l'énergie discrétisée conduit sur chaque direction radiale à un système linéaire de la forme :

$$\hat{\theta}_p \hat{b} + H\theta^* = \hat{D} \tag{24}$$

avec

$$\hat{b} = (b, 0, \dots, 0)'$$

$$\theta^* = (\hat{\theta}_{p+1}, \hat{\theta}_{p+2}, \dots, \hat{\theta}_K)'$$

$H$  est une matrice carrée tridiagonale dont les éléments ainsi que les composantes du vecteur  $\hat{D}$  sont connus au terme de l'itération ( $n - 1$ ).

D'autre part, la condition (5) approchée du coté fluide par une dérivée décentrée  $O(h^2)$  devient.

$$-3\hat{\theta}_p + \hat{a}\theta^* = \lambda\hat{\phi}_p \tag{25}$$

avec

$$\hat{a} = (4, -1, 0, \dots, 0).$$

L'élimination du vecteur  $\theta^*$  à partir du système (24) et de la contrainte (25) permet d'obtenir, entre les vecteurs  $\hat{\phi}_p$  et  $\hat{\theta}_p$ , la relation :

$$\lambda\hat{\phi}_p = \hat{a}H^{-1}\hat{D} - (3 + \hat{a}H^{-1}\hat{b})\hat{\theta}_p. \tag{26}$$

En combinant cette dernière avec la relation (23), on arrive finalement à l'expression suivante :

$$\hat{\theta}_p = [\lambda B + [3 + \hat{a}H^{-1}\hat{b}]A]^{-1} [A[\hat{a}H^{-1}\hat{D}] - \lambda C\hat{\theta}_1]. \tag{27}$$

Cette formule relie à chaque itération la température de paroi  $\hat{\theta}_p$  à la température du noyau  $\hat{\theta}_1$  au moyen des résultats du calcul convectif à l'itération précédente et des matrices  $E$  et  $F$  caractérisant le problème conductif.

#### 4. RESULTATS NUMERIQUES

Etant donné le nombre important de paramètres de contrôle, nous limiterons la présentation des résultats numériques au cas  $r_c = 0.11$  adopté par Sunden [7]. La température de paroi est l'une des grandeurs fondamentales de l'écoulement, elle rend compte du

mécanisme de refroidissement de l'obstacle chauffé. Elle dépend fortement du rapport  $\lambda$  des conductibilités thermiques. Les Fig. 2(a), (b) illustrent bien l'import-

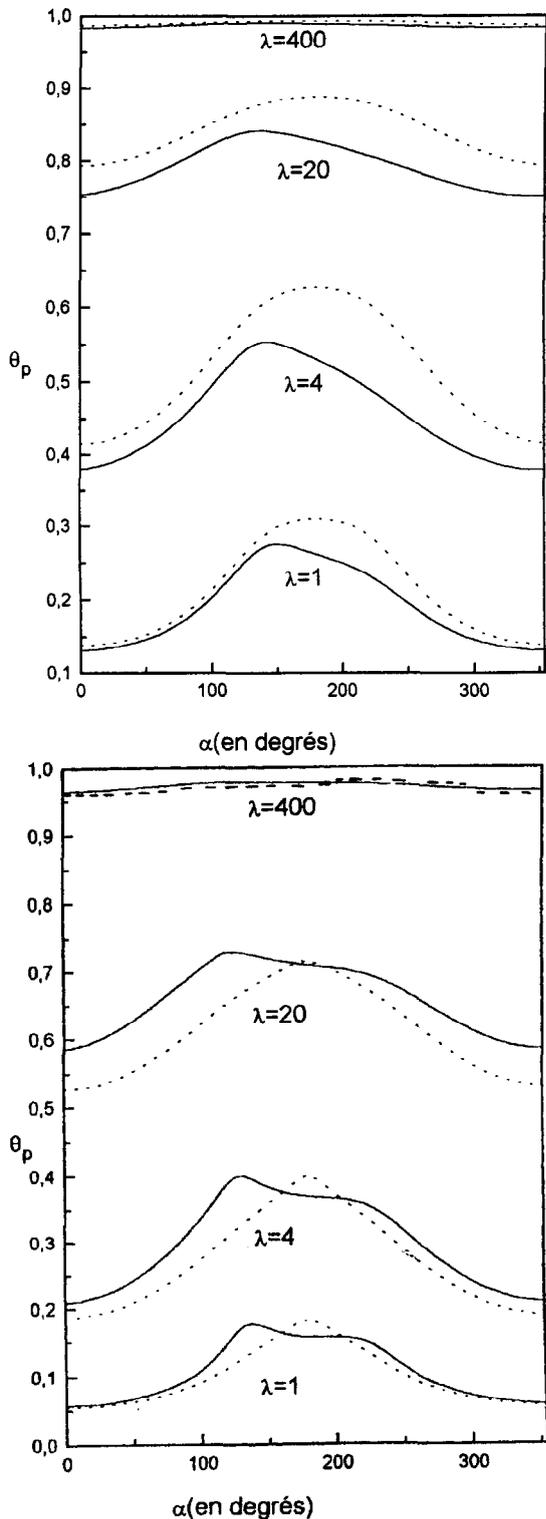


Fig. 2. Distribution de la température pariétale. (a)  $Pr = 0.72$ ,  $Re = 40$ ,  $\alpha_0 = \Pi/2$ , —  $Gr/Re^2 = 8$ , ---  $Gr/Re^2 = 0$ ; (b)  $Pr = 5$ ,  $Re = 40$ ,  $Gr/Re^2 = 8$ , —  $\alpha_0 = \Pi/2$ , ---  $\alpha_0 = 0$ .

tance de ce paramètre sur le refroidissement du cylindre. Pour des valeurs de  $\lambda$  assez grandes, au delà de  $400^\circ$  environ, la température  $\theta_p$  est quasiment constante et voisine de celle du noyau.

Quand  $\lambda$  est faible ou modéré, le refroidissement n'est plus uniforme, l'écart thermique entre l'amont (plus refroidi) et l'aval peut atteindre 20% de la température du noyau autour de la valeur  $\lambda = 4$ . Ce phénomène vaut aussi bien pour l'air que pour l'eau. Il convient toutefois de noter l'influence du nombre de Prandtl sur la température moyenne de la paroi ; cette influence est d'autant plus significative que  $\lambda$  est petit. Pour  $\lambda = 4$  par exemple, la température moyenne de la paroi est respectivement de l'ordre de 0.45 pour  $Pr = 0.72$  et de 0.27 pour  $Pr = 5$ .

Les effets des forces d'origine thermique marquent aussi les profils  $\theta_p(x)$  qui montrent à travers la Fig. 2(a) une amélioration sensible du refroidissement dans le cas de la convection mixte.

La Fig. 2(b) montre que l'influence de l'inclinaison  $\alpha_0$  se manifeste surtout à l'aval de l'obstacle où les profils  $\theta_p(x)$  sont caractérisés par leur dissymétrie pour  $\alpha_0 = \Pi/2$  par rapport au cas symétrique  $\alpha_0 = 0$ .

L'échange thermique avec le fluide environnant est quantifié par le nombre de Nusselt  $Nu = (-2/\Pi)(\partial\theta/\partial y)_{y=0}$  dont les variations sont représentées sur les Fig. 3(a) et (b). On note en premier lieu que l'échange thermique est faible et quasiment uniforme quand  $\lambda$  est petit, il reste faible quelque soit  $\lambda$ , en aval, au voisinage du point de séparation dont la position angulaire est approximativement de  $125^\circ$ . A partir de ce point où il atteint son minimum, le nombre de Nusselt croît régulièrement vers l'amont, comme en situation de convection naturelle lorsque  $Pr = 0.72$ .

Dans le cas de l'eau, la distorsion des profils à l'aval du cylindre, est une preuve que les effets de la convection forcée sont localement importants.

Dans les deux cas, le taux de croissance moyen est environ deux fois plus élevé sur la partie supérieure du fil. Le maximum de transfert est obtenu à l'amont, au point de stagnation. Il est d'autant plus important que  $\lambda$  est grand.

Une comparaison entre les Fig. 4(a) et (b) fait ressortir que la qualité du transfert thermique global est sensiblement affectée par l'inclinaison  $\alpha_0$ . Cette différence de la qualité de l'échange thermique global s'explique par l'existence de zones de convection mixte défavorable quand  $\alpha_0 \neq 0$ . Le nombre de Nusselt moyen  $\overline{Nu}$  rapporté à  $\overline{Nu}_f$  (nombre de Nusselt moyen en convection forcée) est une fonction monotone croissante de  $Gr/Re^2$  pour toutes les valeurs de  $\lambda$ . Le taux de croissance est sensiblement constant en convection mixte orthogonale ( $\alpha_0 = \Pi/2$ ) alors qu'il diminue quand  $Gr/Re^2$  augmente en convection mixte symétrique. Notons aussi que l'influence de  $Gr/Re^2$  sur le transfert thermique global s'amortit quand  $\lambda$  diminue,  $\overline{Nu}$  tend vers  $\overline{Nu}_f$  quand  $\lambda$  tend vers zéro.

D'un point de vue dynamique, les répartitions par-

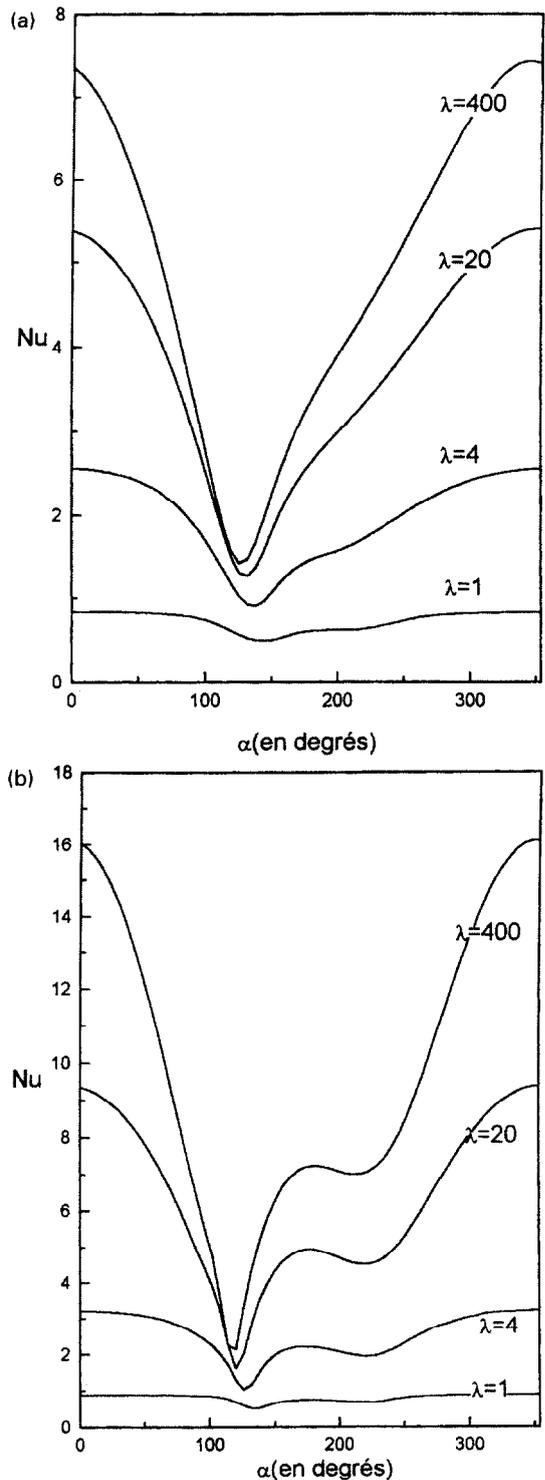


Fig. 3. Distribution du Nusselt local  $Re = 40, Gr/Re^2 = 8, \alpha_0 = \Pi/2$ . (a)  $Pr = 0.72$ , (b)  $Pr = 5$ .

tielles du frottement  $\omega_p$  et de la pression sont essentielles pour le calcul des efforts subis par l'obstacle.

La croissance de  $\lambda$  conduit à celle du frottement à la paroi sur la quasi totalité de l'obstacle sauf dans le

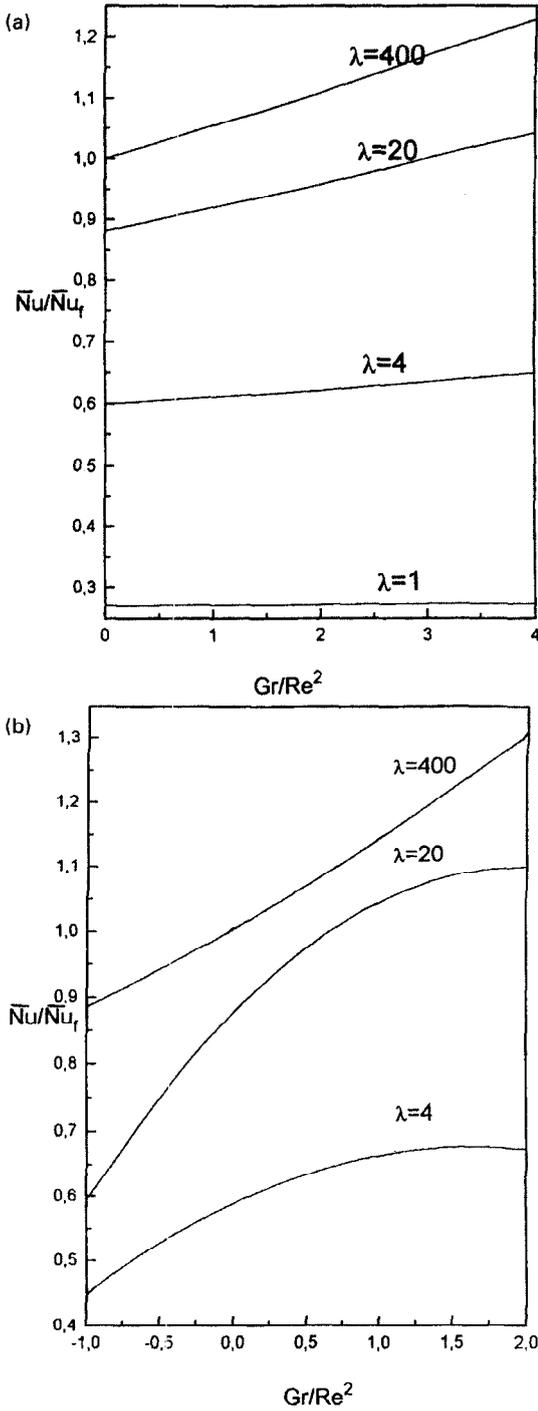


Fig. 4. Variations du Nusselt moyen  $\overline{Nu}$  rapporté à  $\overline{Nu}_f$  en fonction de  $Gr/Re^2$   $Pr = 0.72$ ,  $Re = 20$ . (a)  $\alpha_0 = \pi/2$ , (b)  $\alpha_0 = 0$ .

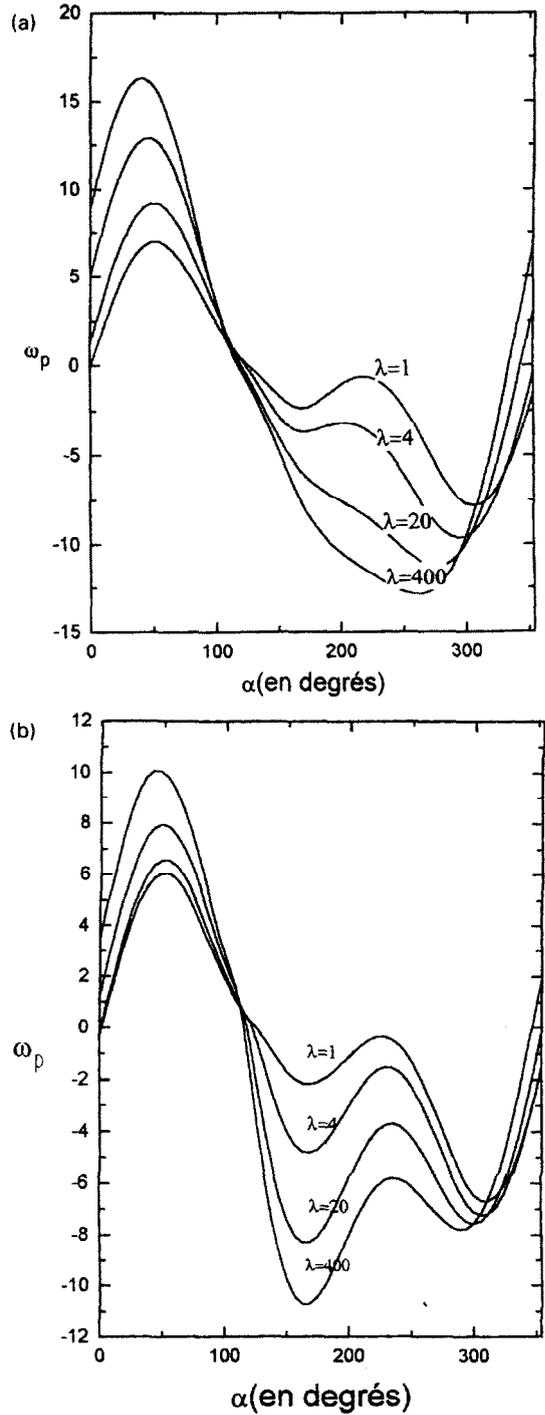


Fig. 5. Distribution du frottement à la paroi  $Re = 40$ ,  $\alpha_0 = \pi/2$ ,  $Gr/Re^2 = 8$ . (a)  $Pr = 0.72$ , (b)  $Pr = 5$ .

voisinage du point de stagnation où l'on observe le phénomène inverse (Fig. 5). Les positions des points de stagnation et de décollement ( $\omega_p = 0$ ) dépendent aussi de  $\lambda$ . Cette dépendance, plus importante pour le point de stagnation se traduit par l'éloignement vers

le bas de ce dernier du point d'arrêt de convection forcée quand  $\lambda$  augmente.

Notons par ailleurs que les effets d'Archimède ( $Gr/Re^2 = 8$ ) sont suffisants pour imposer à l'écoulement une structure analogue à celle de convection naturelle (écoulement rampant). Les effets de convection forcée, se manifestant à travers la distorsion

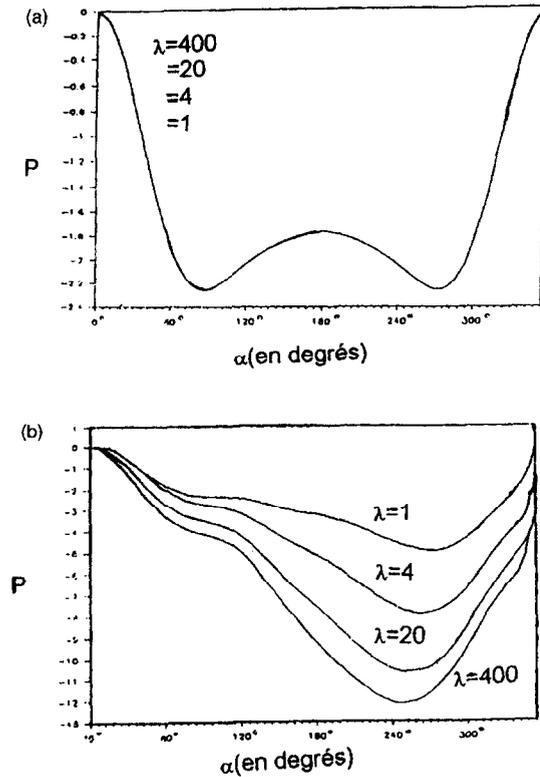


Fig. 6. Distribution de la pression à la paroi  $Pr = 0.72$ ,  $Re = 40$ ,  $\alpha_0 = \Pi/2$ . (a)  $Gr/Re^2 = 0$ , (b)  $Gr/Re^2 = 8$ .

des profile de  $\omega_p(x)$  à l'aval du fil, sont toujours présents dans le cas de l'eau alors que pour  $Pr = 0.72$ , les profils évoluent quand  $\lambda$  augmente vers ceux de convection naturelle.

L'intégration de l'équation de la quantité de mouvement le long de la paroi permet de trouver l'expression de la pression :

$$P(x) - P(0) = \frac{\pi Gr}{Re^2} \int_0^x \theta_p(t) \cos(\pi t) dt + \frac{4}{Re} \int_0^x \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} \right)_{y=0} dt.$$

Les courbes de la Fig. 6 montrent que la chute de pression entre l'amont et l'aval peut être très importante, en particulier quand  $\lambda$  est élevé. Contrairement au cas de la convection forcée,  $P(x)$  possède un seul minimum situé au point de séparation. Ce dernier se déplace vers le haut du fil quand  $\lambda$  augmente.

En convection mixte, le coefficient de traînée se calcule à partir de l'expression :

$$C_x = \frac{2}{Re} \int_0^2 \left( \pi \omega - \frac{\partial \omega}{\partial y} \right)_{y=0} \sin(x) dx - \frac{\pi Gr}{4Re^2} \int_0^2 (\theta_p(x) \sin(2\pi x)) dx.$$

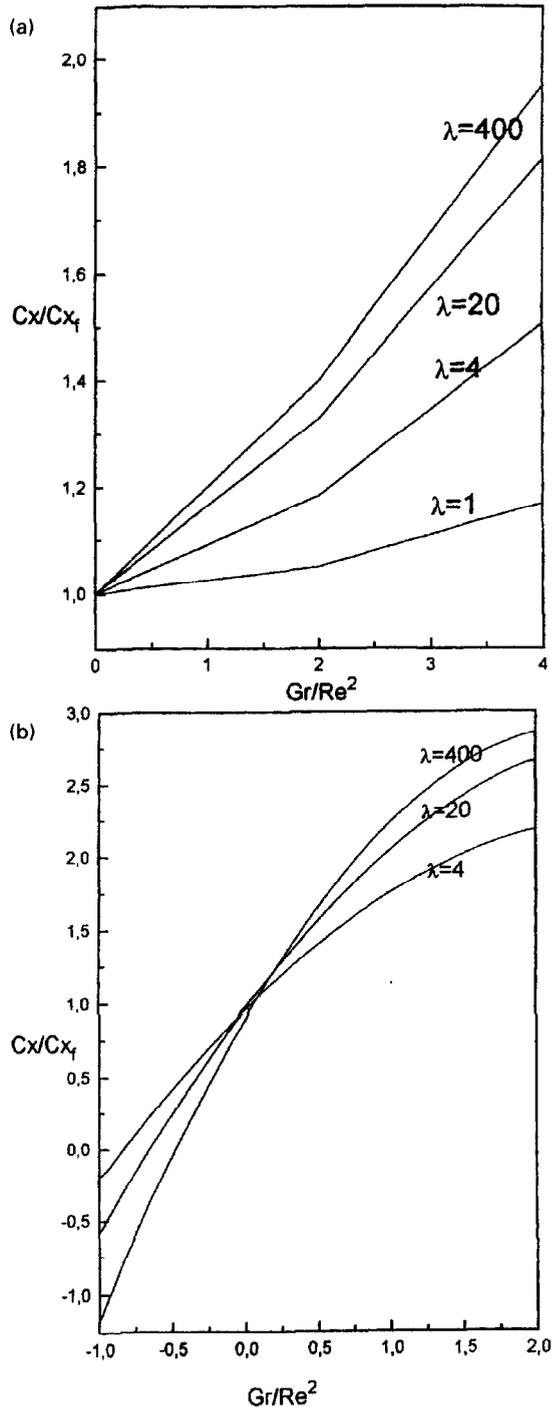


Fig. 7. Variations du coefficient de traînée  $C_x$  rapporté, à  $C_{xf}$  en fonction de  $Gr/Re^2$   $Pr = 0.72$ ,  $Re = 20$ . (a)  $\alpha_0 = \Pi/2$ , (b)  $\alpha_0 = 0$ .

Sur les Fig. 7 sont portées les variations de  $C_x$  rapporté à  $C_{xf}$  (coefficient de traînée en convection forcée) en fonction du paramètre de convection mixte pour divers  $\lambda$

Le rapport  $C_x/C_{xf}$  augmente avec  $\lambda$  et présente une allure parabolique en fonction de  $Gr/Re^2$  dont l'in-

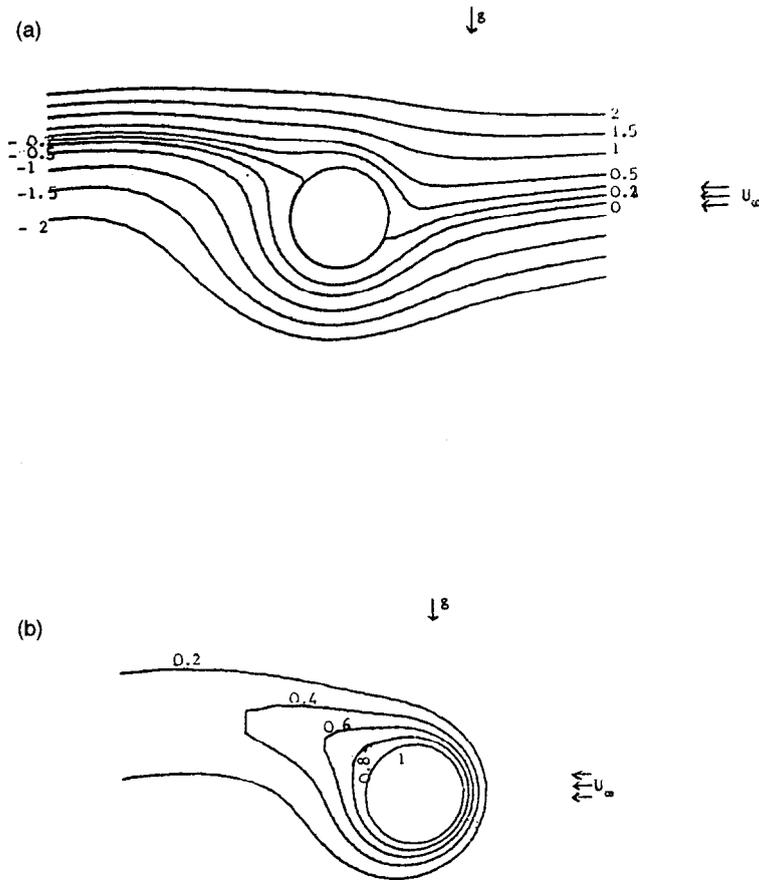


Fig. 8. Isovaleurs  $Pr = 0.72$ ,  $Re = 20$ ,  $Gr/Re^2 = 8$ ,  $\lambda = 400$ ,  $\alpha_0 = \Pi/2$ . (a) Lignes de courant, (b) isothermes.

fluence est évidemment plus significative pour  $\alpha_0 = 0$  que pour  $\alpha_0 = \Pi/2$ . Comme pour le transfert thermique, l'existence de zones de convection mixte défavorable quand  $\alpha_0 \neq 0$  est à l'origine de la diminution de la force de traînée par rapport au cas symétrique.

Les courbes isovaleurs des Fig. 8(a) et (b) illustrent parfaitement l'importance des poussées d'Archimède et de l'inclinaison  $\alpha_0$  sur la structure de l'écoulement. L'écoulement est rampant et s'apparente, au voisinage de la paroi, à une écoulement de convection naturelle; le point de stagnation est bien situé entre les points d'arrêt des convection forcée et naturelle. La forte concentration des lignes isothermes à l'amont y traduit l'importance de l'échange thermique, tandis qu'à l'aval, il y a formation d'un panache thermique, comme en convection naturelle. Les effets des paramètres  $\lambda$  et  $Gr/Re^2$  sont également mis en exergue sur les profils de vitesse radiale en deux points équivalents ( $\alpha = \Pi/2$  et  $-\Pi/2$ ) au sens de la convection forcée.

Les deux profils sont identiques en convection forcée. En convection mixte, nous remarquons en premier lieu l'irrégularité du profil de vitesse en  $\alpha = \Pi/2$  quand  $\lambda = 400$ . Cette irrégularité, d'autant plus apparente que  $\lambda$  est grand, est liée à la proximité

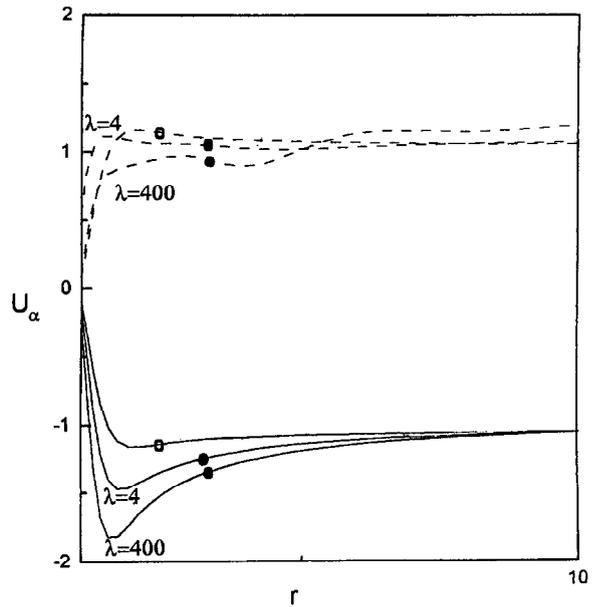


Fig. 9. Profils des vitesses angulaires  $Pr = 5$ ,  $Re = 40$ ,  $\alpha_0 = \Pi/2$ . ---  $\alpha = \Pi/2$ , —  $\alpha = -\Pi/2$ . •  $Gr/Re^2 = 8$ , ○  $Gr/Re^2 = 0$ .

du sillage; l'effet de  $\lambda$ , et par suite celui de la convection naturelle, est de ralentir l'écoulement dans la direction tangentielle au voisinage de la paroi au profit de la composante radiale de la vitesse.

Au point d'abscisse  $\alpha = -\Pi/2$ , l'augmentation de  $\lambda$  conduit à l'augmentation de la vitesse angulaire qui atteint sa valeur asymptotique à une distance de la paroi de l'ordre de huit fois le rayon du cylindre, après une croissance et ensuite une décroissance monotones.

### 5. CONCLUSION

Les résultats exposés ci-dessus rapportent l'influence simultanée du rapport des conductibilités thermiques, des poussées d'Archimède et du nombre de Prandtl sur le mécanisme de refroidissement d'un cylindre chauffé dans sa partie centrale. Une forte dépendance de la structure de l'écoulement et du transfert thermique vis à vis de ces paramètres apparaît aussi bien localement à travers les profils  $\theta_p(x)$ ,  $\omega_p(x)$ ,  $Nu(x)$ ,  $P(x)$  que globalement, en l'occurrence sur le Nusselt moyen et le coefficient de traînée. La direction de l'écoulement incident est également prise en compte. La sensibilité de l'écoulement envers ce paramètre est illustrée par la distorsion des profils le long de la paroi, particulièrement dans la zone de séparation, et par les différences très notables des valeurs des grandeurs globales par rapport à celles calculées dans le cas symétrique  $\alpha_0 = 0$ .

La procédure numérique employée a permis d'aplanir les difficultés de convergence liées aux itérations de couplage par l'affichage, à chaque étape du procédé de stationnarisation, d'une température de paroi  $\theta_p$  en fonction de la température  $\theta_1$  qui règne à la périphérie du noyau chauffé grâce à la relation (4.11). Il convient de souligner que cette dernière est valable quelque soit la distribution angulaire de  $\theta_1$ . Une relation similaire peut aussi être obtenue dans le cas d'une densité de flux de chaleur imposée sur la périphérie du noyau. En conséquence, le modèle pro-

posé reste applicable dans des conditions aux limites thermiques variées et pourrait servir à l'élaboration de lois empiriques de refroidissement d'un obstacle cylindrique dans les situations envisagées.

### REFERENCES

1. Badr, H. M., A theoretical study of laminar mixed convection from a horizontal cylinder in a cross flow. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1983, **26**(5), 639–653.
2. Badr, H. M., On the effect of flow direction on mixed convection from a horizontal cylinder. *Int. J. Num. Meth. Fluids*, 1985, **5**, 1–12.
3. Amaouche, M. et Peube, J. L., Convection mixte stationnaire autour d'un cylindre horizontal. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1985, **28**(7), 1269–1279.
4. Amaouche, M. et Peube, J. L., Convection mixte autour d'un cylindre horizontal, influence des variations des propriétés physiques avec la température. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1986, **29**(9), 1293–1300.
5. Heckel, J. J., Chen, T. S. and Armaly, B. F., Mixed convection along slender vertical cylinders with variable surface temperature. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1989, **32**(8), 1431–1442.
6. Vilimpoc, V., Cole, R. and Sukaneck, P. C., Heat transfer in Newtonian liquids around a circular cylinder. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1990, **33**(3), 447–456.
7. Sunden, B., Influence of buoyancy forces and thermal conductivity on flow field and heat transfer of circular cylinders at small Reynolds number. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1983, **26**(9), 1329–1338.
8. Amaouche, M., On some mixed convection flows described by exact solutions of Prandtl equations. *Eur. J. Mech. B/Fluids*, 1991, **10**(3), 295–312.
9. Imai, I., On the asymptotic behaviour of viscous fluid flow at a great distance from a cylindrical body with special référence to Filon's paradox. *Proc. Roy. A*, 1951, **208**, 487–516.
10. Wachpress, E. L., *Iterative Solution of Elliptic Systems*. Prentice Hall, 1966.
11. Adam, Y., Highly accurate compact methods and boundary conditions. *J. Comp. Phys.* 1977, **24**, 10–22.
12. Lecomte, Y. and Piquet, J., On the use of several compact methods for the study of unsteady incompressible viscous flow round a circular cylinder. *Computers and Fluids*, 1984, **12**(4), 255–280.

### ON THE COOLING OF A HEATED CYLINDER IN PERMANENT MIXED CONVECTION REGIME

**Abstract**—A numerical scheme based upon a finite difference method combined with a boundary integral method is used to investigate the mixed convection heat transfer from a circular cylinder with a heated core region. Numerical results are given for radius  $r_c = 0.11$ , Prandtl numbers  $Pr = 0.72$  and 5, Reynolds numbers  $Re \leq 40$ , buoyancy parameters  $Gr/Re^2 \leq 8$  and thermal conductivity ratios  $\lambda \leq 400$ . The heat transfer and the flow field has been found to be primarily affected by both the buoyancy forces and the thermal conductivity ratio, but also depending on the inclination angle  $\alpha$  and on the Reynolds and Prandtl numbers. © 1998 Elsevier Science Ltd. All rights reserved.